CORRECTION CONTRÔLE N°2

NOM : ……………………………………………

Prénom : ……………………………………………

Calculatrice autorisée

TS$_2$ CRSA
Jeudi 9 octobre

MODULE : UF3.1 – M1.2 – Analyse 2

EXERCICE 1 : (4 points)

On considère l'équation différentielle (E) : $y' + 2y = 2x$

où y est une fonction inconnue de la variable réelle x, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et y' la fonction dérivée de y.

1°) Déterminer les solutions de l'équation différentielle : (E_0) : $y' + 2y = 0$

2°) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = ax + b$.

Déterminer les réels a et b afin que la fonction g soit une solution particulière de (E).

3°) En déduire les solutions de l'équation différentielle (E).

4°) Déterminer la solution f de l'équation (E) vérifiant la condition initiale : $f(0) = 0$.

1°) La solution générale de $[E_0]$ est $y_0(x) = ke^{-2x}$ où $k \in \mathbb{R}$.

2°) g est solution de [E] donc $g' + 2g = 2x$

$g(x) = ax + b$ et $g'(x) = a$

Donc $g' + 2g = 2x \Leftrightarrow a + 2(ax + b) = 2x \Leftrightarrow 2ax + a + 2b = 2x \Leftrightarrow \begin{cases} 2a = 2 \\ a + 2b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ 2b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$

donc $g(x) = x - \dfrac{1}{2}$

3°) La solution générale de [E] est : $y(x) = y_0(x) + g(x) = ke^{-2x} + x - \dfrac{1}{2}$

4°) f est solution de [E] donc $f(x) = ke^{-2x} + x - \dfrac{1}{2}$

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = 0 \\ f(0) = k - \dfrac{1}{2} \end{array}\right\} \Leftrightarrow k = \frac{1}{2}$$

Donc $f(x) = \dfrac{1}{2} e^{-2x} + x - \dfrac{1}{2}$

EXERCICE 2 : (4 points)

On considère l'équation différentielle (E) : $y' + y = e^{-x}$

où y est une fonction inconnue de la variable réelle x, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et y' la fonction dérivée de y.

1°) Déterminer les solutions de l'équation différentielle : (E_0) : $y' + y = 0$

2°) Montrer que la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = xe^{-x}$ est une solution particulière de (E).

3°) En déduire la solution générale de (E).

4°) Déterminer la solution particulière f de (E) telle que $f(3) = 0$.

1°) La solution générale de l'équation $[E_0]$ est $y_0(x) = ke^{-x}$ où $k \in \mathbb{R}$

2°) $g(x) = xe^{-x}$ donc $g'(x) = e^{-x} + x(-e^{-x}) = e^{-x}(1 - x)$.

$g'(x) + g(x) = e^{-x}(1 - x) + xe^{-x} = e^{-x}$ donc g est bien une solution particulière de [E].

3°) La solution générale de [E] est $y(x) = y_0(x) + g(x) = ke^{-x} + x\,e^{-x}$

4°) f est une solution de [E] donc $f(x) = ke^{-x} + x\,e^{-x}$

$$\left.\begin{array}{l} f(3) = 0 \\ f(3) = ke^{-3} + 3e^{-3} \end{array}\right\} \Leftrightarrow 0 = ke^{-3} + 3e^{-3} \Leftrightarrow 0 = (k+3)e^{-3} \Leftrightarrow k = -3$$

Donc $f(x) = -3\,e^{-x} + x\,e^{-x}$

EXERCICE 3 : (2 point)

On donne la copie d'écran suivante :

```
1 desolve([3*y'-2*y=-20*cos(2*x),y(0)=0],y)
```

$$-\exp\left(\frac{2*x}{3}\right)+\cos(2*x)-3*\sin(2*x)$$

Qu'avons-nous cherché à résoudre ? (*Expliquer*)

Nous avons cherché à résoudre l'équation différentielle : 3y' – 2y = - 20 cos(2x) vérifiant la condition initiale : y(0) = 0.

Quelle est la réponse ?

La solution de cette équation est :

$f(x) = -e^{-\frac{2x}{3}} + \cos(2x) - 3\sin(2x)$

```
2 desolve(y'-3*y=exp(3x),y)
```

$$c\_0 *\exp(3*x)+x*\exp(3*x)$$

```
3 factoriser(ans())
```

$$\exp(3*x)*(c\_0+x)$$

Qu'avons-nous cherché à résoudre ? (*Expliquer*)

Nous avons cherché à déterminer la solution générale de l'équation différentielle : y' – 3y = e^{3x}. Cette solution étant factorisée au maximum.

Quelle est la réponse ?

La solution générale de l'équation proposée est : y(x) = (k + x)e^{3x} ; où k ∈ $\mathbb{R}$.

FORMULAIRE :

Dérivée d'un produit : (uv)' = u'v + uv'

Dérivée de e^u : $(e^u)' = u'e^u$