

CORRECTION GROUPEMENT B JUIN 2007

EXERCICE 1 :

PARTIE A :

1°) $(E_0) : y' + 710y = 0$

La solution générale de (E_0) est $y_0(t) = Ce^{-G(t)}$ où G est une primitive de $t \mapsto 710$ donc $G(t) = 710t$.

D'où $y_0(t) = Ce^{-710t}$ avec $C \in \mathbb{R}$.

2°) $h(t) = 1$

$h'(t) = 0$

$h'(t) + 710h(t) = 710$ donc h est bien une solution particulière de (E) .

3°) La solution générale de (E) est $y(t) = y_0(t) + h(t) = Ce^{-710t} + 1$.

4°) φ est solution de (E) donc $\varphi(t) = Ce^{-710t} + 1$.

$$\left. \begin{array}{l} \varphi(0) = C + 1 \\ \varphi(0) = 0 \end{array} \right\} C + 1 = 0 \Leftrightarrow C = -1$$

Donc $\varphi(t) = 1 - e^{-710t}$.

PARTIE B :

1°) $\varphi(t) = 1 - e^{-710t}$

$\varphi'(t) = 710 e^{-710t}$

Donc $\varphi'(t) > 0$ sur $[0 ; +\infty[$, φ est croissante.

2°) a) $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + x^2 \varepsilon_1(x)$ avec $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_1(x) = 0$

$\lim_{t \rightarrow 0} -710t = 0$, on peut donc utiliser le dl de e^x pour celui de e^{-710t} .

$e^{-710t} = 1 - 710t + \frac{(710t)^2}{2} + t^2 \varepsilon_2(t)$ avec $\lim_{t \rightarrow 0} \varepsilon_2(t) = 0$.

D'où $\varphi(t) = 1 - e^{-710t} = 1 - 1 + 710t - \frac{(710t)^2}{2} + t^2 \varepsilon(t)$

$= 710t - \frac{(710t)^2}{2} + t^2 \varepsilon(t)$ avec $\lim_{t \rightarrow 0} \varepsilon(t) = 0$.

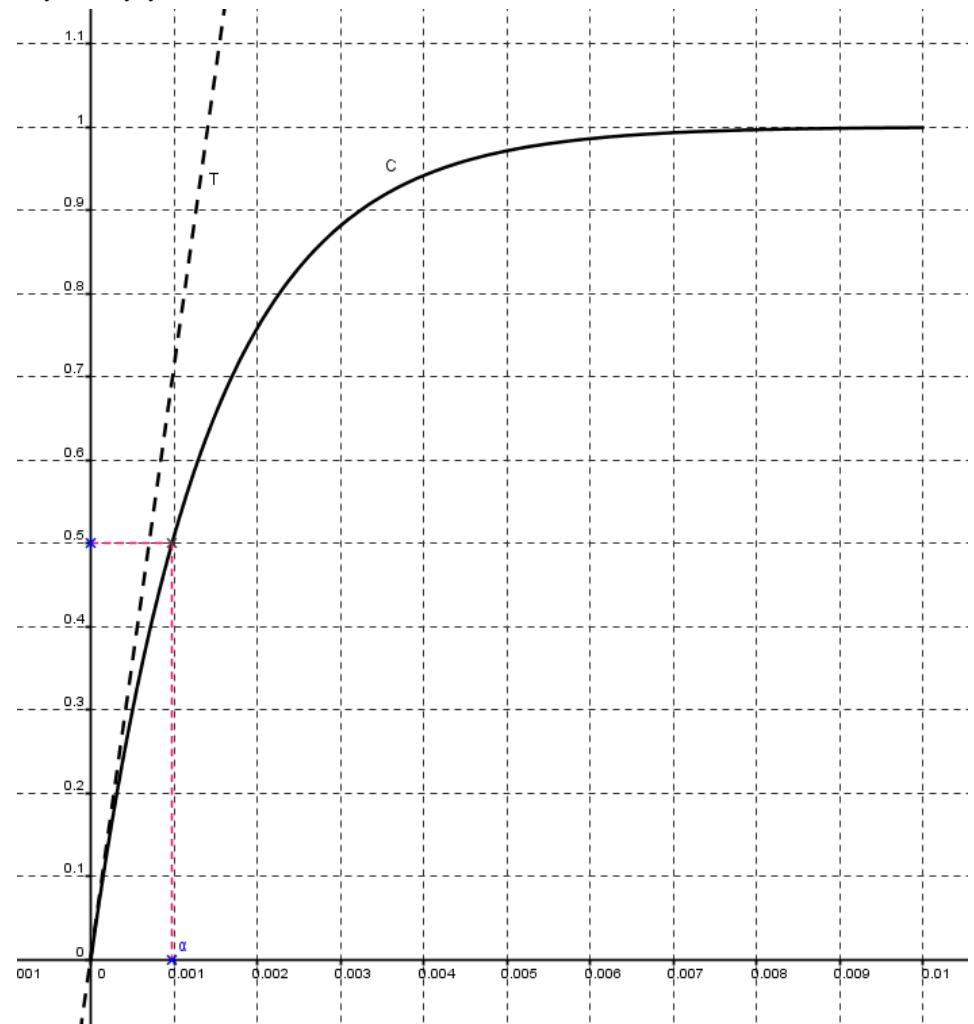
b) L'équation de la tangente T à C au point d'abscisse 0 est donnée par la partie régulière de degré 1 du dl de φ .

Donc $T : y = 710t$

$\varphi(t) - 710t = -\frac{(710t)^2}{2} + t^2 \varepsilon(t)$

Donc pour t proche de 0, on a $\varphi(t) - 710t < 0 \Leftrightarrow \varphi(t) < 710t \Leftrightarrow C$ est au dessous de T .

3°) et 4°) b)



$$4^{\circ}) a) \varphi(\alpha) = 0,5 \Leftrightarrow 1 - e^{-710\alpha} = 0,5$$

$$\Leftrightarrow -e^{-710\alpha} = -0,5$$

$$\Leftrightarrow e^{-710\alpha} = 0,5$$

$$\Leftrightarrow -710\alpha = \ln(0,5)$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \frac{\ln(0,5)}{-710}$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \frac{\ln(2)}{710} \text{ car } -\ln(0,5) = -\ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln(2)$$

$$\alpha \cong 0,00098$$

PARTIE C :

$$1^{\circ}) I(t) = 710 \int_0^t x e^{-710x} dx$$

$$\text{On pose } u(x) = x \quad u'(x) = 1$$

$$v'(x) = e^{-710x} \quad v(x) = \frac{-1}{710} e^{-710x}$$

En utilisant la formule d'intégration par parties, on a :

$$I(t) = 710 \left[\frac{-x}{710} e^{-710x} \right]_0^t + \frac{710}{710} \int_0^t e^{-710x} dx$$

$$= -te^{-710t} + \left[\frac{-1}{710} e^{-710x} \right]_0^t$$

$$= -te^{-710t} - \frac{1}{710} e^{-710t} + \frac{1}{710}$$

$$2^{\circ}) I(t) = -te^{-710t} - \frac{1}{710} e^{-710t} + \frac{1}{710}$$

$$= \frac{1}{710} (-710te^{-710t} - e^{-710t} + 1)$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{t \rightarrow +\infty} -710t = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0 \end{array} \right\} \lim_{t \rightarrow +\infty} -710te^{-710t} = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{t \rightarrow +\infty} -710t = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \end{array} \right\} \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-710t} = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{t \rightarrow +\infty} -710te^{-710t} = 0 \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-710t} = 0 \end{array} \right\} \lim_{t \rightarrow +\infty} I(t) = \frac{1}{710}$$

$$\text{D'où } \lim_{t \rightarrow +\infty} I(t) \cong 0,00141.$$

EXERCICE 2

PARTIE A :

$$X \text{ suit } \mathcal{N}(30; 0,09) \text{ donc } X^* = \frac{X-30}{0,09} \text{ suit } \mathcal{N}(0; 1).$$

$$P(29,8 \leq X \leq 30,2) = P\left(\frac{29,8-30}{0,09} \leq X^* \leq \frac{30,2-30}{0,09}\right)$$

$$\cong P(-2,22 \leq X^* \leq 2,22)$$

$$= P(X^* \leq 2,22) - P(X^* \leq -2,22)$$

$$= \pi(2,22) - \pi(-2,22)$$

$$= \pi(2,22) - (1 - \pi(2,22))$$

$$= 2\pi(2,22) - 1$$

$$= 2 \times 0,9868 - 1$$

$$= 0,9736$$

La probabilité que la pièce de type 1 soit conforme est de 0,9736.

PARTIE B :

1°) Epreuve de Bernoulli : La pièce de type 2 est défectueuse (succès) $p = 0,03$, ou non (échec).

On réalise $n = 20$ fois cette épreuve de manière indépendante (stock assez important pour assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise).

Y compte le nombre de succès au cours des 20 réalisations.

Donc Y suit $\mathcal{B}(20; 0,03)$.

$$2^{\circ}) P(Y = 0) = C_{20}^0 \times 0,03^0 \times (1 - 0,03)^{20} = 0,97^{20} \cong 0,5438$$

La probabilité qu'aucune pièce ne soit défectueuse est de 0,54.

$$3^{\circ}) P(Y \geq 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - 0,97^{20} \cong 0,4562$$

La probabilité qu'une pièce au moins soit défectueuse est de 0,46.

PARTIE C :

1°) Z suit $\mathcal{N}(\mu; 5)$, on prélève un échantillon de 100 pièces donc $\bar{Z}$ suit

$$\mathcal{N}\left(\mu; \frac{5}{\sqrt{100}}\right) = \mathcal{N}(\mu; 0,5).$$

On se place sous l'hypothèse nulle, donc $\bar{Z}$ suit $\mathcal{N}(400; 0,5)$, d'où $\bar{Z}^* = \frac{\bar{Z} - 400}{0,5}$

suit $\mathcal{N}(0;1)$.

$$P(400 - h \leq \bar{Z} \leq 400 + h) = 0,95 \Leftrightarrow P\left(\frac{400 - h - 400}{0,5} \leq \bar{Z}^* \leq \frac{400 + h - 400}{0,5}\right) = 0,95$$

$$\Leftrightarrow P\left(\frac{-h}{0,5} \leq \bar{Z}^* \leq \frac{h}{0,5}\right) = 0,95$$

$$\Leftrightarrow P(-2h \leq \bar{Z}^* \leq 2h) = 0,95$$

$$\Leftrightarrow P(\bar{Z}^* \leq 2h) - P(\bar{Z}^* \leq -2h) = 0,95$$

$$\Leftrightarrow \pi(2h) - \pi(-2h) = 0,95$$

$$\Leftrightarrow \pi(2h) - (1 - \pi(2h)) = 0,95$$

$$\Leftrightarrow 2\pi(2h) - 1 = 0,95$$

$$\Leftrightarrow \pi(2h) = 0,975$$

Lecture de table : $\pi(1,96) = 0,975$

$$\text{Donc } 2h = 1,96 \Leftrightarrow h = \frac{1,96}{2} \Leftrightarrow h = 0,98$$

D'où $P(400 - 0,98 \leq \bar{Z} \leq 400 + 0,98) = 0,95 \Leftrightarrow P(399,02 \leq \bar{Z} \leq 400,98) = 0,95$.

2°) On prélève un échantillon de taille 100 dans le lot, on calcul la moyenne des hauteurs des pièces de cet échantillon. Si cette moyenne est dans l'intervalle $[399,02; 400,98]$, au seuil de risque de 5%, on accepte H_0 et on rejette H_1 , le lot est considéré comme conforme pour la hauteur. Si la moyenne n'est pas dans l'intervalle $[399,02; 400,98]$, au seuil risque de 5%, on rejette H_0 et on accepte H_1 , le lot n'est pas considéré comme conforme pour la hauteur.

3°) $\bar{z} = 399,12$

$399,12 \in [399,02; 400,98]$ donc au seuil risque de 5%, on accepte la livraison qui est considérée comme conforme pour la hauteur.