

CORRECTION GROUPEMENT B

NOUVELLE CALÉDONIE OCTOBRE 2006

EXERCICE 1 :

PARTIE A :

1°) $10^4 y' + 2ty = 0$ (E)

La solution générale de (E) est $y(t) = C e^{-G(t)}$ où G est une primitive de $t \mapsto \frac{2t}{10^4}$

donc $G(t) = \frac{t^2}{10^4}$ d'où $y(t) = C e^{-\frac{t^2}{10^4}}$.

2°) f solution de (E) donc $f(t) = C e^{-\frac{t^2}{10^4}}$.

$$\left. \begin{array}{l} f(0) = C \\ f(0) = 1 \end{array} \right\} C = 1 \text{ donc } f(t) = e^{-\frac{t^2}{10^4}}$$

PARTIE B :

1°)a)

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{t \rightarrow -\infty} -\frac{t^2}{10^4} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \end{array} \right\} \lim_{t \rightarrow -\infty} f(t) = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{t \rightarrow +\infty} -\frac{t^2}{10^4} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \end{array} \right\} \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 0$$

b) $\lim_{t \rightarrow -\infty} f(t) = 0$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 0$ donc $y = 0$ est asymptote horizontale à $\mathcal{C}$ en $-\infty$ et en $+\infty$.

2°)a) $f'(t) = -\frac{2t}{10^4} e^{-\frac{t^2}{10^4}}$

$$f'(t) \geq 0 \Leftrightarrow -\frac{2t}{10^4} e^{-\frac{t^2}{10^4}} \geq 0 \Leftrightarrow -\frac{2t}{10^4} \geq 0 \Leftrightarrow t \leq 0$$

b)

t	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(t)$	$+$	0	$-$
f	0	1	0

$f(0) = 1$

3°)a) $e^u = 1 + u + u\varepsilon_1(u)$ avec $\lim_{u \rightarrow 0} \varepsilon_1(u) = 0$

$\lim_{t \rightarrow 0} -\frac{t^2}{10^4} = 0$ donc on peut utiliser le dl de e^u pour celui de f .

$f(t) = e^{-\frac{t^2}{10^4}} = 1 - \frac{t^2}{10^4} + t^2 \varepsilon(t)$ avec $\lim_{u \rightarrow 0} \varepsilon(u) = 0$.

b) $g(t) = 1 - \frac{t^2}{10^4}$

On a $f(t) - g(t) = t^2 \varepsilon(t)$

Donc pour t proche de 0, Γ est la parabole tangente à $\mathcal{C}$.

4°) $\int_0^{30} \left(1 - \frac{t^2}{10^4}\right) dt = \left[t - \frac{3t^3}{10^4}\right]_0^{30} = 30 - \frac{3 \times 30^3}{10^4} = 21,9$

PARTIE C :

1°) $f(50) = e^{-\frac{50^2}{10^4}} = e^{-0,25} \cong 0,8$.

La probabilité que cette catastrophe naturelle ne se produise pas pendant les 50 ans à venir est de 0,8.

2°)a) $e^{-\frac{50^2}{10^4}} = 0,5 \Leftrightarrow -\frac{t^2}{10^4} = \ln(0,5)$

$$\Leftrightarrow -t^2 = 10^4 \ln(0,5)$$

$$\Leftrightarrow t^2 = 10^4 \ln(2) \text{ (car } -\ln(a) = \ln\left(\frac{1}{a}\right))$$

$$\Leftrightarrow t = 10^2 \sqrt{\ln(2)} \text{ (car } t \text{ est exprimé en années donc } t \geq 0)$$

D'où $t \cong 83,3$.

b) La probabilité que cette catastrophe se produise dans les 83,3 années à venir est de 0,5.

EXERCICE 2 :

PARTIE A :

$$\begin{aligned}1^\circ) P(A) &= P(A \cap D) + P(A \cap \bar{D}) \\&= P(D) \times P(A/D) + P(\bar{D}) \times P(A/\bar{D}) \\&= 0,001 \times 0,99 + (1 - 0,001) \times 0,005 \\&\cong 0,006\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2^\circ) P(\bar{D}/A) &= \frac{P(\bar{D} \cap A)}{P(A)} \\&= \frac{P(\bar{D}) \times P(A/\bar{D})}{P(A)} \\&= \frac{(1 - P(D)) \times P(A/\bar{D})}{P(A)} \\&= \frac{(1 - 0,001) \times 0,005}{0,006} \\&\cong 0,83\end{aligned}$$

PARTIE B :

$$X \text{ suit } \mathcal{N}(40; 0,06) \text{ donc } X^* = \frac{X - 40}{0,06} \text{ suit } \mathcal{N}(0; 1).$$

$$\begin{aligned}P(39,85 \leq X \leq 40,15) &= P\left(\frac{39,85 - 40}{0,06} \leq X^* \leq \frac{40,15 - 40}{0,06}\right) \\&= P(-2,5 \leq X^* \leq 2,5) \\&= P(X^* \leq 2,5) - P(X^* \leq -2,5) \\&= \pi(2,5) - \pi(-2,5) \\&= \pi(2,5) - (1 - \pi(2,5)) \\&= 2\pi(2,5) - 1 \\&\cong 2 \times 0,9938 - 1 \\&= 0,9876 \\&\cong 0,988\end{aligned}$$

La probabilité que l'ensemble pompe-poulie soit conforme est de 0,988.

PARTIE C :

1°) Epreuve de Bernoulli : La pompe-poulie prélevée à une côte supérieure ou égale à 40 (succès) : $p = 0,5$, ou non (échec).

On réalise 7 fois cette épreuve de manière indépendante (la production est suffisamment importante pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise). Y compte le nombre de succès au cours des 7 réalisations. Y suit $\mathcal{B}(7; 0,5)$.

$$2^\circ) P(Y = 7) = C_7^7 0,5^7 (1 - 0,5)^0 = 0,5^7 \cong 0,008$$

La probabilité que les 7 pompes-poulies aient une côte supérieure à 40 est de 0,008.

PARTIE D : **ERREUR ENONCE** : pour les questions 1°) et 2°) : lire $\bar{Z}$ au lieu de Z .

1°) Z suit $\mathcal{N}(\mu; 0,06)$. On prend un échantillon de taille 30 donc $\bar{Z}$ suit

$$\mathcal{N}\left(\mu; \frac{0,06}{\sqrt{30}}\right) \text{ et } \frac{0,06}{\sqrt{30}} \cong 0,011 \text{ donc } \bar{Z} \text{ suit } \mathcal{N}(\mu; 0,011).$$

Sous l'hypothèse nulle, $\bar{Z}$ suit $\mathcal{N}(40; 0,011)$ donc $\bar{Z}^* = \frac{\bar{Z} - 40}{0,011}$ suit $\mathcal{N}(0; 1)$.

$$2^\circ) P(40 - h \leq \bar{Z} \leq 40 + h) = 0,95 \Leftrightarrow P\left(\frac{40 - h - 40}{0,011} \leq \bar{Z}^* \leq \frac{40 + h - 40}{0,011}\right) = 0,95$$

$$\Leftrightarrow P\left(\frac{-h}{0,011} \leq \bar{Z}^* \leq \frac{h}{0,011}\right) = 0,95$$

$$\Leftrightarrow P\left(\bar{Z}^* \leq \frac{h}{0,011}\right) - P\left(\bar{Z}^* \leq \frac{-h}{0,011}\right) = 0,95$$

$$\Leftrightarrow \pi\left(\frac{h}{0,011}\right) - \pi\left(\frac{-h}{0,011}\right) = 0,95$$

$$\Leftrightarrow \pi\left(\frac{h}{0,011}\right) - \left(1 - \pi\left(\frac{h}{0,011}\right)\right) = 0,95$$

$$\Leftrightarrow 2\pi\left(\frac{h}{0,011}\right) - 1 = 0,95$$

$$\Leftrightarrow \pi\left(\frac{h}{0,011}\right) = 0,975$$

Lecture de table : $\pi(1,96) = 0,975$.

$$\text{Donc } \frac{h}{0,011} = 1,96 \Leftrightarrow h = 1,96 \times 0,011$$

D'où $h \cong 0,022$

$$\text{Donc } P(40 - 0,022 \leq \bar{Z} \leq 40 + 0,022) = 0,95 \Leftrightarrow P(39,978 \leq \bar{Z} \leq 40,022) = 0,95.$$

3°) On prélève dans le lot un échantillon de 30 pompe-poulies, on calcul la moyenne des côtes, si cette moyenne est dans l'intervalle $[39,978 ; 40,022]$ on accepte H_0 et on rejette H_1 , c'est-à-dire le lot est considéré comme conforme pour la côte au seuil de risque de 5%. Sinon, on rejette H_0 et on accepte H_1 , c'est-à-dire le lot n'est pas considéré comme conforme pour la côte, au seuil de risque de 5%.

4°) $\bar{x} = 39,98$.

$39,98 \in [39,978 ; 40,022]$, donc le lot est considéré, au seuil de risque de 5%, comme conforme pour la côte.