CORRECTION GROUPEMENT B JUIN 2006

EXERCICE 1 :

PARTIE A :

1°) (E₀) : $y'' - 3y' - 4y = 0$

Equation caractéristique : $r^2 - 3r - 4 = 0$

$\Delta = 9 + 16 = 25$

$\Delta > 0$ donc 2 racines réelles : $r_1 = \frac{3-5}{2} = \frac{-2}{2} = -1$ et $r_2 = \frac{3+5}{2} = \frac{8}{2} = 4$

La solution générale de (E₀) est donc $y_0(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{4x}$ où $C_1 \in \mathbb{R}$ et $C_2 \in \mathbb{R}$.

2°) $h(x) = x e^{-x}$

$h'(x) = e^{-x}(1-x)$

$h''(x) = e^{-x}(-1-1+x) = (x-2)e^{-x}$

$$\begin{aligned} h''(x) - 3h'(x) - 4h(x) &= (x-2)e^{-x} - 3e^{-x}(1-x) - 4xe^{-x} \\ &= e^{-x}(x-2-3+3x-4x) \\ &= -5e^{-x} \end{aligned}$$

Donc h est bien une solution particulière de (E₀).

3°) La solution générale de (E) est $y(x) = y_0(x) + h(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{4x} + x e^{-x}$

où $C_1 \in \mathbb{R}$ et $C_2 \in \mathbb{R}$.

4°) f est solution de (E) donc $f(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{4x} + x e^{-x}$

$f'(x) = -C_1 e^{-x} + 4C_2 e^{4x} + e^{-x}(1-x)$

$$\left. \begin{aligned} f(0) &= 2 \\ f(0) &= C_1 + C_2 \end{aligned} \right\} C_1 + C_2 = 2 \Leftrightarrow C_1 = 2 - C_2$$

$$\left. \begin{aligned} f'(0) &= -1 \\ f'(0) &= -C_1 + 4C_2 + 1 \end{aligned} \right\} -C_1 + 4C_2 + 1 = -1 \Leftrightarrow -5C_2 - 2 + 1 = -1 \Leftrightarrow C_2 = 0$$

D'où $C_1 = 2$ donc $f(x) = 2e^{-x} + x e^{-x} = (2+x)e^{-x}$

PARTIE B :

1°) $f(x) = (x+2)e^{-x}$

On a $e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + t^3 \varepsilon_1(t)$ avec $\lim_{t \rightarrow 0} \varepsilon_1(t) = 0$

Comme $\lim_{x \rightarrow 0} -x = 0$ on peut utiliser le dl de e^t pour celui de e^{-x} .

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + x^3 \varepsilon_2(x) \text{ avec } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_2(x) = 0$$

$$\begin{aligned} (x+2) \left(1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) &= x - x^2 + \frac{x^3}{2} + 2 - 2x + x^2 - \frac{x^3}{3} + x^3 \varepsilon_3(x) \\ &= 2 - x + \frac{x^3}{6} + x^3 \varepsilon_3(x) \text{ avec } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_3(x) = 0 \end{aligned}$$

Donc $f(x) = 2 - x + \frac{x^3}{6} + x^3 \varepsilon(x)$ avec $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$

2°) L'équation de la tangente T à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0 est donnée par la partie régulière de degré 1 du dl de f(x).

T : $y = 2 - x$

3°) Pour x proche de 0 : $f(x) - (2-x) = \frac{x^3}{6} + x^3 \varepsilon(x)$

Donc pour $x \geq 0$: $f(x) - (2-x) \geq 0 \Leftrightarrow \mathcal{C}$ au dessus de T

$x \leq 0$: $f(x) - (2-x) \leq 0 \Leftrightarrow \mathcal{C}$ au dessous de T

PARTIE C :

1°) $I = \int_0^{0,6} f(x) dx = \int_0^{0,6} (x+2)e^{-x} dx$

On pose : $u(x) = x+2$

$v'(x) = e^{-x}$

$u'(x) = 1$

$v(x) = -e^{-x}$

En effectuant une intégration par parties, on obtient :

$$\begin{aligned} I &= \left[(-x-2)e^{-x} \right]_0^{0,6} - \int_0^{0,6} -e^{-x} dx \\ &= -2,6 e^{-0,6} + 2 - \left[e^{-x} \right]_0^{0,6} \\ &= -2,6 e^{-0,6} + 2 - e^{-0,6} + 1 \\ &= 3 - 3,6 e^{-0,6} \end{aligned}$$

2°) $I \cong 1,024$

3°) $f(x) \geq 0$ pour $x \in [-0,6; 0]$ donc I représente l'aire, en unité d'aire, du domaine délimité par les droites d'équation $x = -0,6$, $x = 0$ l'axe des abscisses et

la courbe $\mathcal{C}$. Domaine qui peut aussi être noté : $\left\{ (x;y) / \begin{cases} -0,6 \leq x \leq 0 \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases} \right\}$

EXERCICE 2 :

PARTIE A :

L'intégralité de cette partie est à faire directement à l'aide de la calculatrice, aucune justification ou formule de calcul n'est demandée.

1°) a) $r \cong 0,98$

b) $y = 0,406x + 15$

2°) Année de rang 7 : $y = 0,406 \times 7 + 15 = 17,842$.

L'année de rang 7, il sera fabriqué 17 842 chaudières.

PARTIE B :

Il peut être intéressant de traduire les données du problème à l'aide d'un arbre pondéré.

1°) $P(A) = \frac{900}{1500} = 0,6$

La probabilité de prélever une chaudière à cheminée est de 0,6.

$P(B) = \frac{600}{1500} = 0,4$ (On aurait aussi pu faire $P(B) = 1 - P(A)$ étant donné que les

deux évènements sont contraires).

La probabilité de prélever une chaudière à ventouse est de 0,4.

$P(D/A) = 0,01$

La probabilité que la chaudière soit défectueuse sachant qu'elle est à cheminée est de 0,01.

$P(D/B) = 0,05$

La probabilité que la chaudière soit défectueuse sachant qu'elle est à ventouse est de 0,05.

2°) $P(D \cap A) = P(A) \times P(D/A) = 0,6 \times 0,01 = 0,006$

La probabilité que la chaudière à cheminée soit défectueuse est de 0,006.

$P(D \cap B) = P(B) \times P(D/B) = 0,4 \times 0,05 = 0,02$

La probabilité que la chaudière à ventouses soit défectueuse est de 0,02.

3°) On utilise la formule des probabilités totales :

$P(D) = P(D \cap A) + P(D \cap B) = 0,006 + 0,02 = 0,026$

PARTIE C :

X suit $\mathcal{N}(15 ; 3)$ donc $X^* = \frac{X-15}{3}$ suit $\mathcal{N}(0 ; 1)$.

$P(X \geq 10) = 1 - P(X \leq 10)$

$= 1 - P\left(X^* \leq \frac{10-15}{3}\right)$

$= 1 - P\left(X^* \leq -\frac{5}{3}\right)$

$= 1 - \pi\left(-\frac{5}{3}\right)$

$= 1 - \left(1 - \pi\left(\frac{5}{3}\right)\right)$

$= \pi\left(\frac{5}{3}\right)$

$\cong \pi(1,67)$

$\cong 0,9525$

$\cong 0,953$

La probabilité qu'une chaudière à cheminée soit amortie est de 0,953.

PARTIE D :

1°) La fréquence des chaudières non défectueuses de l'échantillon est :

$f = \frac{94}{100} = 0,94$

L'estimation ponctuelle de la fréquence inconnue p des chaudières de ce stock qui sont sans défaut est 0,94.

2°) F suit $\mathcal{N}\left(p; \sqrt{\frac{p(1-p)}{100}}\right)$

p est inconnue, l'estimation ponctuelle de la fréquence est $\sigma = \sqrt{\frac{100}{100-1}} \sigma'$ ou σ'

est l'écart type de l'échantillon, à savoir : $\sigma' = \sqrt{f(1-f)} = \sqrt{0,94 \times 0,06}$

Donc $\sigma = \sqrt{\frac{100}{100-1}} \sqrt{0,94 \times 0,06}$, l'estimation ponctuelle de $\sqrt{\frac{p(1-p)}{100}}$ sera donc :

$$\sqrt{\frac{100}{100-1}} \sqrt{0,94 \times 0,06} \frac{1}{\sqrt{100}} = \sqrt{\frac{0,0564}{99}}$$

(*) On peut donc estimer que F suit $\mathcal{N}\left(0,94; \sqrt{\frac{0,0564}{99}}\right)$

REMARQUE : F suit $\mathcal{N}\left(p; \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ où n est la taille de l'échantillon. f est la

fréquence relative à l'échantillon.

L'estimation ponctuelle de p est f, celle de σ est $\sqrt{\frac{n}{n-1}}\sigma'$ où σ' est l'écart type de

l'échantillon, à savoir : $\sqrt{f(1-f)}$. Donc en utilisant les estimations ponctuelles, F

$$\text{suit } \mathcal{N}\left(f; \frac{\sqrt{\frac{n}{n-1}}\sqrt{f(1-f)}}{\sqrt{n}}\right) = \mathcal{N}\left(f; \sqrt{\frac{f(1-f)}{n-1}}\right).$$

$$F^* = \frac{F-0,94}{\sqrt{\frac{0,0564}{99}}} \text{ suit } \mathcal{N}(0;1).$$

On cherche h tel que : $P(0,94 - h \leq F \leq 0,94 + h) = 0,95$

$$\Leftrightarrow P\left(\frac{0,94 - h + 0,94}{\sqrt{\frac{0,0564}{99}}} \leq F^* \leq \frac{0,94 + h + 0,94}{\sqrt{\frac{0,0564}{99}}}\right) = 0,95$$

$$\Leftrightarrow P\left(-h\sqrt{\frac{99}{0,0564}} \leq F^* \leq h\sqrt{\frac{99}{0,0564}}\right) = 0,95$$

$$\Leftrightarrow P\left(F^* \leq h\sqrt{\frac{99}{0,0564}}\right) - P\left(F^* \leq -h\sqrt{\frac{99}{0,0564}}\right) = 0,95$$

$$\Leftrightarrow \pi\left(h\sqrt{\frac{99}{0,0564}}\right) - \pi\left(-h\sqrt{\frac{99}{0,0564}}\right) = 0,95$$

$$\Leftrightarrow \pi\left(h\sqrt{\frac{99}{0,0564}}\right) - \left(1 - \pi\left(h\sqrt{\frac{99}{0,0564}}\right)\right) = 0,95$$

$$\Leftrightarrow 2\pi\left(h\sqrt{\frac{99}{0,0564}}\right) - 1 = 0,95$$

$$\Leftrightarrow \pi\left(h\sqrt{\frac{99}{0,0564}}\right) = \frac{1,975}{2} = 0,975$$

Lecture de table : $\pi(1,96) = 0,975$

$$\text{D'où : } h\sqrt{\frac{99}{0,0564}} = 1,96 \Leftrightarrow h = 1,96\sqrt{\frac{0,0564}{99}} \cong 0,047$$

L'intervalle de confiance de la fréquence p est donc au seuil de confiance de

$$95\% : [0,94 - 0,047; 0,94 + 0,047] = [0,893 ; 0,987]$$

Avec les bornes arrondies à 10^{-2} près, il s'agit de l'intervalle : $[0,89 ; 0,99]$.

REMARQUES :

- On peut aussi poser dès le début : $\sqrt{\frac{0,0564}{99}} \cong 0,024$, cela ne changera rien au résultat et cela évitera d'alourdir inutilement le calcul avec la racine carrée. Dans ce cas là, on donnera ligne (*)

On peut donc estimer que F suit $\mathcal{N}\left(0,94; \sqrt{\frac{0,0564}{99}}\right) \cong \mathcal{N}(0,94; 0,024)$

- Cette question étant difficile à cause des différentes estimations (notamment celle de l'écart type), on peut aussi se contenter de répondre directement en donnant l'intervalle de confiance de la fréquence se trouvant dans la leçon, à savoir :

L'intervalle $\left[f - t\sqrt{\frac{f(1-f)}{(n-1)}}, f + t\sqrt{\frac{f(1-f)}{(n-1)}}\right]$ est appelé intervalle de confiance de la fréquence de la population avec le coefficient de confiance de $\alpha\%$ (ou avec le risque de $(100 - \alpha)\%$).

$$t \text{ vérifie : } 2\pi(t) - 1 = \frac{\alpha}{100}$$

Mais dans ce cas vous ne pouvez pas avoir la totalité des points à la question.....
ce qui est quand même mieux que d'habitude car en général « toute réponse non
justifiée est notée 0 ».

3°) Faux. Il s'agit d'un intervalle de confiance à 95%, pas à 100%, donc la
fréquence peut se trouver à l'extérieur de cet intervalle.

Il n'est pas demandé de justification à cette question, donc un simple « faux »
suffit à obtenir la totalité des points.