CORRECTION GROUPEMENT B JUIN 2005

EXERCICE 1

PARTIE A :

1°) (E_0) : $(1 + x)y' + y = 0$

La solution générale de (E_0) est $y_0(x) = Ce^{-G(x)}$ où G est une primitive de

$x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$ donc $G(x) = \ln|x + 1|$.

Comme $x \in]-1 ; +\infty[$ on en déduit que $G(x) = \ln(1 + x)$.

D'où $y_0(x) = Ce^{-\ln(x+1)} = Ce^{\ln\left(\frac{1}{1+x}\right)} = \dfrac{C}{1+x}$ où $C \in \mathbb{R}$.

2°) $g(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{1+x}$

$$g'(x) = \frac{\left(\frac{1}{1+x}\right)(1+x) - \ln(1+x)}{(1+x)^2} = \frac{1-\ln(1+x)}{(1+x)^2}$$

$$(1+x)g'(x) + g(x) = \frac{1-\ln(1+x)}{(1+x)^2} + \frac{\ln(1+x)}{1+x} = \frac{1}{1+x}$$

Donc g est bien une solution particulière de (E).

3°) La solution générale de (E) est :

$$y(x) = y_0(x) + g(x) = \frac{C}{1+x} + \frac{\ln(1+x)}{1+x} = \frac{C+\ln(1+x)}{1+x} \text{ avec } C \in \mathbb{R}.$$

4°) f est solution de (E) donc $f(x) = \dfrac{C+\ln(1+x)}{1+x}$

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = C \\ f(0) = 2 \end{array}\right\} C = 2$$

Donc $f(x) = \dfrac{2+\ln(1+x)}{1+x}$

PARTIE B :

1°) $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = -\infty$ donc $x = -1$ est asymptote verticale à $\mathscr{C}$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ donc $y = 0$ est asymptote horizontale à $\mathscr{C}$ en $+\infty$.

2°)a) $f(x) = \dfrac{2+\ln(1+x)}{1+x}$

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{1}{1+x}\right)(1+x) - (2+\ln(1+x))}{(1+x)^2} = \frac{1-2-\ln(1+x)}{(1+x)^2} = \frac{-1-\ln(1+x)}{(1+x)^2}$$

b) $-1 - \ln(1 + x) \geq 0 \Leftrightarrow \ln(1 + x) \leq -1$

$\Leftrightarrow 1 + x \leq e^{-1}$

$\Leftrightarrow x \leq -1 + \dfrac{1}{e}$

$\Leftrightarrow x \leq \dfrac{-e+1}{e}$

On a $\dfrac{-e+1}{e} \cong -0,63$

$f'(x) = \dfrac{-1-\ln(1+x)}{(1+x)^2}$ donc $f'(x)$ est du signe de $-1 - \ln(1 + x)$.

c)

x	-1		$\frac{-e+1}{e}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{e}{1+e}$	$\searrow$	0

$$f\left(\frac{-e+1}{e}\right) = \frac{2+\ln\left(1+\frac{1-e}{e}\right)}{1+\frac{1-e}{e}} = \frac{2+\ln(e^{-1})}{1+e^{-1}} = \frac{2-1}{1+e^{-1}} = \frac{1}{1+\frac{1}{e}} = \frac{1}{\frac{e+1}{e}} = \frac{e}{1+e}$$

3°)a) L'équation de la tangente $\mathscr{T}$ à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0 est donnée par la partie régulière de degré 1 du dl de $f(x)$.

Donc $\mathscr{T}$: $y = 2 - x$.

b) Pour x proche de 0, on a :

$f(x) - (2 - x) = \dfrac{1}{2}x^2 + x^2\varepsilon(x)$

Donc $f(x) - (2 - x)$ est du signe de $\dfrac{1}{2}x^2$, à savoir positif.

Pour x proche de 0, $f(x) - (2 - x) \geq 0$ donc $\mathscr{C}$ est au dessus de $\mathscr{T}$.

PARTIE C :

1°) $G(x) = \frac{1}{2}[\ln(1+x)]^2$

$G'(x) = \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{1}{1+x} \times \ln(1+x) = \frac{\ln(1+x)}{1+x}$

G est donc une primitive de $x \mapsto \frac{\ln(1+x)}{1+x}$

2°) $f(x) = \frac{2+\ln(1+x)}{1+x} = \frac{2}{1+x} + \frac{\ln(1+x)}{1+x}$

Une primitive de f est donc :

$F(x) = 2\ln(1+x) + G(x) = 2\ln(1+x) + \frac{1}{2}[\ln(1+x)]^2$

3°)a) $I = \int_0^2 f(x)dx = \left[F(x)\right]_0^2$

$= F(2) - F(0)$

$= 2\ln(3) + \frac{1}{2}[\ln(3)]^2 - 2\ln(1) - \frac{1}{2}[\ln(1)]^2$

$= 2\ln(3) + \frac{1}{2}[\ln(3)]^2$

b) $I \cong 2,80$

c) Pour $x \in [0;2]$ on a $f(x) > 0$, I représente, en unité d'aire, l'aire du domaine délimité par les droites x = 0, x = 2 ; l'axe des abscisses et la courbe $\mathscr{C}$.

Domaine que l'on peut définir sous la forme : $\left\{(x;y) / \begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases}\right\}$

Comme le repère est orthonormal, d'unité graphique 1 cm, I est aussi l'aire de ce domaine en cm².

EXERCICE 2 :

PARTIE A :

1°) X_1 suit $\mathscr{N}(90;0,17)$ donc $X_1^* = \frac{X_1 - 90}{0,17}$ suit $\mathscr{N}(0;1)$.

$P(89,6 \leq X_1 \leq 90,4) = P\left(\frac{89,6-90}{0,17} \leq X_1^* \leq \frac{90,4-90}{0,17}\right)$

$= P(-2,35 \leq X_1^* \leq 2,35)$

$= P(X_1^* \leq 2,35) - P(X_1^* \leq -2,35)$

$= \pi(2,35) - \pi(-2,35)$

$= \pi(2,35) - (1 - \pi(2,35))$

$= 2\pi(2,35) - 1$

$= 2 \times 0,9906 - 1$

$\cong 0,98$

La probabilité que la rondelle soit conforme est de 0,98.

2°) D suit $\mathscr{N}(90;\sigma_1)$ donc $D^* = \frac{D-90}{\sigma_1}$ suit $\mathscr{N}(0;1)$.

On cherche σ_1 tel que $P(89,6 \leq D \leq 90,4) = 0,99$

$\Leftrightarrow P\left(\frac{89,6-90}{\sigma_1} \leq D^* \leq \frac{90,4-90}{\sigma_1}\right) = 0,99$

$\Leftrightarrow P\left(\frac{-0,4}{\sigma_1} \leq D^* \leq \frac{0,4}{\sigma_1}\right) = 0,99$

$\Leftrightarrow P\left(D^* \leq \frac{0,4}{\sigma_1}\right) - P\left(D^* \leq \frac{-0,4}{\sigma_1}\right) = 0,99$

$\Leftrightarrow \pi\left(\frac{0,4}{\sigma_1}\right) - \pi\left(\frac{-0,4}{\sigma_1}\right) = 0,99$

$\Leftrightarrow \pi\left(\frac{0,4}{\sigma_1}\right) - \left(1 - \pi\left(\frac{0,4}{\sigma_1}\right)\right) = 0,99$

$\Leftrightarrow 2\pi\left(\frac{0,4}{\sigma_1}\right) - 1 = 0,99$

$\Leftrightarrow \pi\left(\frac{0,4}{\sigma_1}\right) = 0,995$

Lecture de table : $\left.\begin{array}{l}\pi(2{,}57) \;=\; 0{,}9949\\ \pi(2{,}58) \;=\; 0{,}995\end{array}\right\}\pi(2{,}575) = 0{,}995$

D'où $\dfrac{0{,}4}{\sigma_1}$ = 2,575 ⇔ σ_1 = $\dfrac{0{,}4}{2{,}575} \cong 0{,}16$

PARTIE B :

1°) Epreuve de Bernoulli : la rondelle a un diamètre défectueux (succès) p = 0,02 ou non (échec).

On réalise 4 fois de manière indépendante cette épreuve (le stock est assez important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise).

Y_1 compte le nombre de succès au cours des 4 réalisations.

Y_1 suit $\mathscr{B}$(4 ;0,02).

2°) $P(Y_1 = 0) = C_4^0 0{,}02^0(1-0{,}02)^4 = 0{,}98^4 \cong 0{,}922$

3°) $P(Y_1 \leq 1) = P(Y_1 = 0) + P(Y_1 = 1)$

$= C_4^0 0{,}02^0(1-0{,}02)^4 + C_4^1 0{,}02^1(1-0{,}02)^3$

$= 0{,}98^4 + 4 \times 0{,}002 \times 0{,}98^3$

$\cong 0{,}998$

PARTIE C :

1°) Lorsque l'on peut approcher une loi binomiale par une loi normale, les paramètres de celle-ci sont :

m = np = 1000 x 0,02 = 20 et $\sigma = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{1000 \times 0{,}02 \times 0{,}98} = \sqrt{19{,}6} \cong 4{,}43$

2°) Z suit $\mathscr{N}$(20 ;4,43) donc $Z^* = \dfrac{Z-20}{4{,}43}$ suit $\mathscr{N}$(0 ;1)

$P(Z \leq 15{,}5) = P\left(Z^* \leq \dfrac{15{,}5-20}{4{,}43}\right)$

$\cong P(Z^* \leq -1{,}02)$

$= \pi(-1{,}02)$

$= 1 - \pi(1{,}02)$

$\cong 1 - 0{,}8461$

$= 0{,}1539$

$\cong 0{,}15$

La probabilité qu'il y ait au plus 15 rondelles non conformes dans le lot est de 0,15.

PARTIE D :

1°) $P(89{,}967 \leq \overline{X_2} \leq 90{,}033) = 0{,}95$

La règle de décision du test est la suivante : On prélève un échantillon de 100 rondelles, on calcul la moyenne des diamètres. Si cette moyenne est comprise dans l'intervalle [89,967 ; 90,033] on accepte H_0 et on refuse H_1, c'est-à-dire le lot est considéré comme conforme pour les diamètres, au risque de 5. Si non on rejette H_0 et on accepte H_1, le lot n'est pas conforme pour les diamètres.

2°) $\overline{x}$ = 90,02

90,02 ∈ [89,967 ; 90,033] la livraison est conforme pour les diamètres, au risque de 5%.