CORRECTION GROUPEMENT B JUIN 2004

EXERCICE 1 :

A] Loi normale

1°) X suit $\mathcal{N}(100 ;0,25)$ donc $X^* = \dfrac{X - 100}{0,25}$ suit $\mathcal{N}(0 ;1)$.

Une tige est conforme pour la longueur signifie que sa longueur est comprise entre 99,45 mm et 100,55 mm.

$$P(99,45 \le X \le 100,55) = P\left(\frac{99,45 - 100}{0,25} \le X^* \le \frac{100,55 - 100}{0,25}\right)$$
$$= P(- 2,2 \le X^* \le 2,2)$$
$$= P(X^* \le 2,2) - P(X^* \le - 2,2)$$
$$= \pi(2,2) - \pi(- 2,2)$$
$$= \pi(2,2) - (1 - \pi(2,2))$$
$$= 2\,\pi(2,2) - 1$$

Lecture de table : $\pi(2,2) = 0,9861$

Donc $P(99,45 \le X \le 100,55) = 2\times0,9861 - 1 \approx 0,97$.

Donc 97% de la production est conforme pour la longueur.

2°) $P(100 - h \le X \le 100 + h) = 0,95 \Leftrightarrow P\left(\dfrac{100 - h + 100}{0,25} \le X^* \le \dfrac{100 + h - 100}{0,25}\right) = 0,95$

$$\Leftrightarrow P(- 4h \le X^* \le 4h) = 0,95$$
$$\Leftrightarrow P(X^* \le 4h) - P(X^* \le - 4h) = 0,95$$
$$\Leftrightarrow \pi(4h) - \pi(- 4h) = 0,95$$
$$\Leftrightarrow \pi4h) - (1 - \pi(4h)) = 0,95$$
$$\Leftrightarrow 2\,\pi(4h) - 1 = 0,95$$
$$\Leftrightarrow \pi(4h) = \frac{1,95}{2} = 0,975$$

Lecture de table : $\pi(1,96) = 0,975$

D'où $4h = 1,96 \Leftrightarrow h = 0,49$.

95% de la production sont des tiges dont les longueurs font entre 99,51 mm et 100,49 mm.

B] Loi Binomiale – Loi de Poisson

1°) Epreuve de Bernoulli : On prélève une tige dans la production, celle-ci a une longueur conforme ou non.

Succès : la tige n'est pas conforme pour la longueur : $p = 0,03$

On réalise 50 fois, de manières indépendantes, cette épreuve, car le prélèvement des 50 tiges est assimilé à un tirage avec remise. $n = 50$

Donc Y suit $\mathcal{B}(50 ;0,03)$

2°) $P(Y = 2) = C_{50}^2 0,03^2 \times 0,97^{47} = 1225 \times 0,03^2 \times 0,97^{48} \approx 0,26$

3°) $P(Y \le 2) = P(Y = 0) + P(Y = 1) + P(Y = 2)$

$$= C_{50}^0\, 0,97^{50} + C_{50}^1\, 0,03 \times 0,97^{49} + C_{50}^2 0,03^2 \times 0,97^{48}$$
$$= 0,97^{50} + 50 \times 0,03 \times 0,97^{49} + 1225 \times 0,03^2 \times 0,97^{48}$$
$$\approx 0,81$$

4°) $\lambda = np = 50 \times 0,03 = 1,5$

5°) Z suit $\mathcal{P}(1,5)$

Par lecture de table : $P(Z = 2) = 0,251 \approx 0,25$

$P(Z \le 2) = 0,223 + 0,335 + 0,251 = 0,809 \approx 0,81$

C] Intervalle de confiance

$\bar{D}$ suit $\mathcal{N}\left(\mu;\dfrac{\sigma}{\sqrt{50}}\right) = \mathcal{N}\left(\mu;\dfrac{0,19}{\sqrt{50}}\right)$

1°) L'échantillon prélevé a une moyenne de $\bar{x} = 9,99$.

L'estimation ponctuelle de la moyenne est donc de $\mu = 9,99$.

2°) On cherche h tel que $P(\bar{x} - h \le \bar{D} \le \bar{x} + h) = 0,95$.

$\bar{D}$ suit $\mathcal{N}\left(\mu;\dfrac{0,19}{\sqrt{50}}\right)$ donc $\bar{D}^* = \dfrac{\bar{D} - \mu}{\dfrac{0,19}{\sqrt{50}}}$ suit $\mathcal{N}(0 ;1)$.

On prendra $\mu = \bar{x} = 9,99$ comme approximation de μ.

$$P(\bar{x} - h \le \bar{D} \le \bar{x} + h) = 0,95 \Leftrightarrow P\left(\frac{\bar{x} - h - \bar{x}}{\dfrac{0,19}{\sqrt{50}}} \le \bar{D}^* \le \frac{\bar{x} + h - \bar{x}}{\dfrac{0,19}{\sqrt{50}}}\right) = 0,95$$
$$\Leftrightarrow P\left(\frac{-h\sqrt{50}}{0,19} \le \bar{D}^* \le \frac{h\sqrt{50}}{0,19}\right) = 0,95$$
$$\Leftrightarrow P\left(\bar{D}^* \le \frac{h\sqrt{50}}{0,19}\right) - P\left(\bar{D}^* \le \frac{-h\sqrt{50}}{0,19}\right) = 0,95$$
$$\Leftrightarrow \pi\left(\frac{h\sqrt{50}}{0,19}\right) - \pi\left(\frac{-h\sqrt{50}}{0,19}\right) = 0,95$$
$$\Leftrightarrow \pi\left(\frac{h\sqrt{50}}{0,19}\right) - \left(1 - \pi\left(\frac{h\sqrt{50}}{0,19}\right)\right) = 0,95$$

$$\Leftrightarrow 2\,\pi\left(\frac{h\sqrt{50}}{0,19}\right) - 1 = 0,95$$

$$\Leftrightarrow \pi\left(\frac{h\sqrt{50}}{0,19}\right) = 0,975$$

Lecture de table : $\pi\,(1,96) = 0,95$

D'où $\frac{h\sqrt{50}}{0,19} = 1,96 \Leftrightarrow h = \frac{1,96\times 0,19}{\sqrt{50}} \cong 0,05$

On a donc $P(9,99 - 0,05 \le \bar{D} \le 9,99 + 0,05) = 0,95 \Leftrightarrow P(9,94 \le \bar{D} \le 10,04) = 0,95$

L'intervalle de confiance de la moyenne μ des diamètres, au seuil de confiance de 95%, est donc : [9,94 ;100,04].

On peut de contenter de donner directement le résultat du cours, mais attention, dans ce cas il ne vous sera pas attribué la totalité des points à la question. Ce qui est quand même mieux qu'en général où « toute réponse non justifiée ne rapporte aucun point ».

L'intervalle $\left[\overline{x} - t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$ est appelé intervalle de confiance de la moyenne de la population avec le coefficient de confiance de α% (ou avec le risque de $(100 - \alpha)$%).

t vérifie : $2\,\pi(t) - 1 = \frac{\alpha}{100}$

3°) Faux.

En effet, il s'agit d'un intervalle de confiance à 95%, pas à 100%. Donc μ a 5% de chance de se trouver à l'extérieur.

On ne demande pas de justification pour cette réponse, mais sans celle-ci ce n'est pas évident de comprendre le choix du faux.

EXERCICE 2 :

A] Résolution d'une équation différentielle

1°) (E_0) : $y' + 0,4xy = 0$

La solution générale de (E_0) est $y_0(x) = Ce^{-G(x)}$ où G est une primitive de $x \mapsto 0,4x$

Donc $G(x) = 0,4\,\frac{x^2}{2} = 0,2x^2$

$y_0(x) = Ce^{-0,2x^2}$ où $C \in \mathbb{R}$.

2°) $\left.\begin{matrix} h(x) = 1 \\ h'(x) = 0 \end{matrix}\right\} h'(x) + 0,4xh(x) = 0,4x$

Donc h est bien une solution particulière de (E).

3°) La solution générale de (E) est $y(x) = y_0(x) + h(x) = Ce^{-0,2x^2} + 1$

4°) F solution de (E) donc $F(x) = Ce^{-0,2x^2} + 1$

$\left.\begin{matrix} F(0) = 0 \\ F(0) = C + 1 \end{matrix}\right\} C = -1$

Donc $F(x) = -e^{-0,2x^2} + 1$

Le choix du F n'est pas génial, on pourrait confondre avec une primitive, mais c'est ce F qui est donné dans l'énoncé.

B] Etude d'une fonction

1°) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ donc $y = 0$ est asymptote horizontale à $\mathscr{C}$ en $+\infty$.

2°)a) $f'(x) = e^{-0,2x^2}(0,4 - 0,16x^2)$

$= 0,4e^{-0,2x^2}(1 - 0,4x^2)$

$= 0,4e^{-0,2x^2}(1 - x\sqrt{0,4})(1 + x\sqrt{0,4})$

b) $x \in \mathbb{R}+$, donc $f'(x)$ est du signe de $1 - x\sqrt{0,4}$.

$1 - x\sqrt{0,4} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{0,4}}$

Si $x \in \left[0\,,\frac{1}{\sqrt{0,4}}\right]$: $f(x) \ge 0$ et si $x \in \left[\frac{1}{\sqrt{0,4}};+\infty\right[$: $f'(x) \le 0$

c)

x	0		$\frac{1}{\sqrt{0,4}}$		$+\infty$
f'(x)		+	0	-	
f	0	↗	0,38	↘	0

$f(0) = 0$

$f\left(\frac{1}{\sqrt{0,4}}\right) \approx 0,38$

Attention, de manière générale il faut toujours donner des valeurs exactes dans un tableau de variation, mais ici, il est explicitement demandé de donner une valeur approchée, donc on est obéissant …

3°) L'équation de $\mathscr{T}$ est donnée par la partie régulière de degré 1 du développement limité en 0 à l'ordre 3 de f(x).

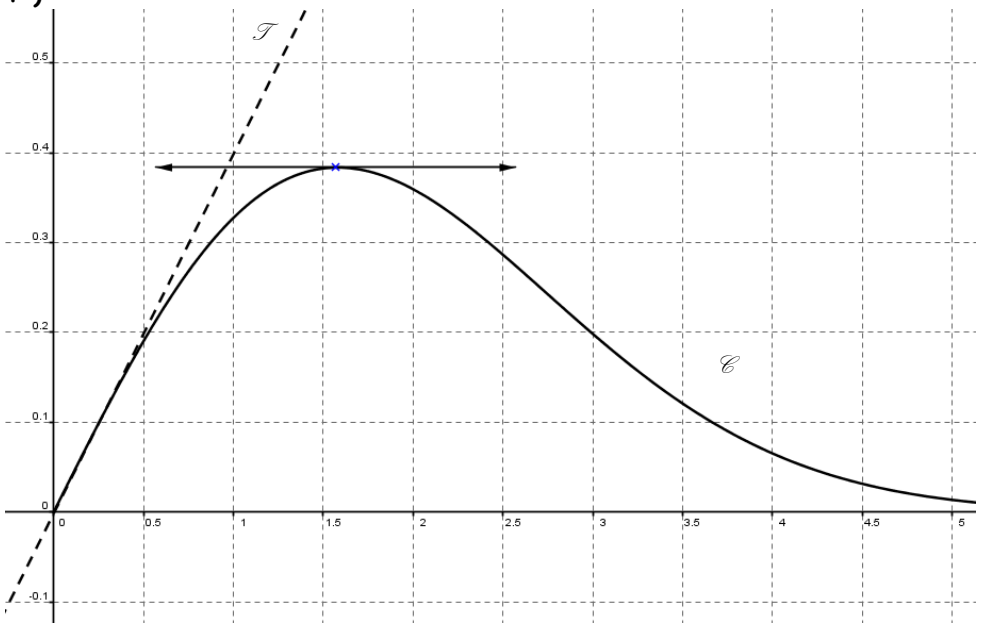
Donc $\mathscr{T}$: $y = 0,4x$

On a $f(x) - 0,4x = -0,08x^3 + x^3\,\varepsilon(x)$

Donc pour $x \ge 0$, on a $-0,08x^3 < 0$.

Donc pour $x \ge 0$ et x proche de 0, on a $f(x) - 0,4x < 0$, donc $\mathscr{C}$ est au dessous de $\mathscr{T}$.

4°)



N'oubliez pas de placer la tangente horizontale, bien qu'elle ne soit pas demandée.

C] Application à un problème de probabilité.

Attention pour cette partie, bien qu'elle soit « vendue » pour une question de probabilité, en réalité aucune notion de probabilité n'est utilisée dans cette question.

1°) $P(X \leq 4) = \int_0^4 f(t)dt = 1 - e^{-0,2\times 16} \approx 0,96$

Une année donnée, il y a 96% de chances que l'agglomération soit protégée de la crue.

2°)a) $P(X \leq x_0) = 0,99 \Leftrightarrow \int_0^{x_0} f(t)dt = 0,99$

$\Leftrightarrow 1 - e^{-0,2x_0^2} = 0,99$

$\Leftrightarrow - e^{-0,2x_0^2} = -0,01$

$\Leftrightarrow e^{-0,2x_0^2} = 0,01$

$\Leftrightarrow -0,2\, x_0^2 = \ln(0,01)$

$\Leftrightarrow x_0^2 = \dfrac{\ln(0,01)}{-0,2}$

x_0 étant positif, on a : $x_0 = \sqrt{\dfrac{\ln(0,01)}{-0,2}} = \sqrt{\dfrac{-\ln(10)}{-0,2}} = \sqrt{10\ln(10)}$

b) $x_0 \approx 4,80$ m

c) $P(X \leq 5) = \int_0^5 f(t)dt = \int_0^{x_0} f(t)dt + \int_{x_0}^5 f(t)dt = 0,99 + \int_{x_0}^5 f(t)dt$

f étant positive alors $\int_{x_0}^5 f(t)dt > 0$ d'où $P(X \leq 5) > 0,99$

L'affirmation est donc vraie.

On ne demande pas de justification pour cette réponse, mais sans celle-ci ce n' pas évident de comprendre le choix du vrai.