CORRECTION GROUPEMENT B JUIN 2002

EXERCICE 1 :

1°)a) A et B sont indépendants donc :

$P(E_1) = P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = 0{,}04 \times 0{,}02 = 0{,}0008$

La probabilité que la file des bouteilles soit vide et que le réservoir soit vide est de 0,0008.

b) $P(E_2) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}04 + 0{,}02 - 0{,}0008 = 0{,}0592$

La probabilité d'avoir un défaut d'approvisionnement est de 0,0592.

2°)a) $P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$

$= 0{,}06065 + 0{,}3033 + 0{,}0758$

$= 0{,}9856$

La probabilité que la machine tombe en panne mois de 2 fois sur 100 jours est de 0,9856.

b) $P(X \leq 4) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4)$

$= \sum_{i=0}^{4} P(X = i)$

$= 0{,}9856 + 0{,}0126 + 0{,}0016$

$= 0{,}9998$

La probabilité que la machine tombe en panne moins de 4 fois pendant 100 jours est de 0,9998.

c) ERREUR D'ENONCE : $P(X \leq n) \geq 0{,}99$ (au lieu de $P(X \leq n) = 0{,}99$)

On a $P(X \leq 2) = 0{,}9856$ et $P(X \leq 3) = 0{,}9982$

Donc le plus petit entier n tel que $P(X \leq n) \geq 0{,}99$ est n = 3.

3°) Y suit $\mathcal{N}(1{,}5\,;0{,}01)$ donc $Y^* = \dfrac{Y - 1{,}5}{0{,}01}$ suit $\mathcal{N}(0\,;1)$.

$P(1{,}47 \leq Y \leq 1{,}53) = P\left(\dfrac{1{,}47 - 1{,}5}{0{,}01} \leq Y^* \leq \dfrac{1{,}53 - 1{,}5}{0{,}01}\right)$

$= P(-3 \leq Y^* \leq 3)$

$= P(Y^* \leq 3) - P(Y^* \leq -3)$

$= \pi(3) - \pi(-3)$

$= \pi(3) - (1 - \pi(3))$

$= 2\pi(3) - 1$

$= 2 \times 0{,}99865 - 1$

$\cong 0{,}997$

Le 4°) qui est proposé sur le site de l'APMEP n'est pas le 4°) Qu'ont eu les MAI, en effet ce 4°) est destiné aux élèves du groupement B qui n'ont pas la fiabilité à leur programme, ce qui n'est pas le cas des MAI. Mais les tests de validité d'hypothèse étant au programme de MAI, il est important de savoir résoudre les deux 4°) existant.

4°) Z suit $\mathcal{N}(\mu\,;0{,}01)$

Echantillon de taille 100 donc $\overline{Z}$ suit $\mathcal{N}\left(\mu; \dfrac{0{,}01}{\sqrt{100}}\right) = \mathcal{N}(\mu\,;0{,}001)$

a) Sous l'hypothèse nulle, on a $\mu = 1{,}5$

Donc $\overline{Z}$ suit $\mathcal{N}(1{,}5\,;0{,}001)$

b) $\overline{Z}$ suit $\mathcal{N}(1{,}5\,;0{,}001)$ donc $\overline{Z}^* = \dfrac{\overline{Z} - 1{,}5}{0{,}001}$ suit $\mathcal{N}(0\,;1)$

$P(1{,}5 - h \leq \overline{Z} \leq 1{,}5 + h) = 0{,}95$

$\Leftrightarrow P\left(\dfrac{1{,}5 - h - 1{,}5}{0{,}001} \leq \overline{Z}^* \leq \dfrac{1{,}5 + h - 1{,}5}{0{,}001}\right) = 0{,}95$

$\Leftrightarrow P(-1000h \leq \overline{Z}^* \leq 1000h) = 0{,}95$

$\Leftrightarrow P(\overline{Z}^* \leq 1000h) - P(\overline{Z}^* \leq -1000h) = 0{,}95$

$\Leftrightarrow \pi(1000h) - \pi(-1000h) = 0{,}95$

$\Leftrightarrow \pi(1000h) - (1 - \pi(1000h)) = 0{,}95$

$\Leftrightarrow 2\pi(1000h) - 1 = 0{,}95$

Lecture de table : $\pi(1{,}96) = 0{,}975$

Donc $1000h = 1{,}96 \Leftrightarrow h = 0{,}00196$ donc à 10^{-3} prés : $h \cong 0{,}002$

c) Le seuil de signification du test est de 0,05, donc le seuil d'acceptation est de 95%.

On vient de voir que $P(1{,}5 - 0{,}002 \leq \overline{Z} \leq 1{,}5 + 0{,}002) = 0{,}95$

$\Leftrightarrow P(1{,}498 \leq \overline{Z} \leq 1{,}502) = 0{,}95$

La règle de décision du test est donc la suivante : Si la moyenne des hauteurs de remplissage de 100 bouteilles prises au hasard dans la production est comprise dans l'intervalle [1,498 ;1,502] alors on accepte l'hypothèse H_0 et on refuse H_1. La machine est conforme pour le volume d'eau dans les bouteilles. Si non, on refuse H_0 et on accepte H_1, la machine n'est pas conforme pour le volume d'eau des bouteilles.

d) $\bar{z} = 1{,}495$

On a $1{,}495 \notin [1{,}498 ;1{,}502]$ donc, au seuil risque de 5%, on peut conclure que la machine est mal réglée.

4°) MAI (FIABILITE)

ENONCE :

4°) Fiabilité d'une machine à embouteiller

On s'intéresse à une machine à embouteiller prélevée au hasard dans le parc des machines sur le point d'être livrées par le constructeur.

On désigne par T la variable aléatoire qui, à toute machine prélevée au hasard dans le parc, associe sa durée de vie avant une défaillance.

On note $P(T > t)$la probabilité qu'une machine prélevée au hasard dans le parc n'ait pas de défaillance avant l'instant t, exprimé en jours.

On suppose que $P(T > t) = e^{-0,005t}$.

a) Calculer la probabilité qu'une machine prélevée au hasard dans le parc fonctionne plus de 200 jours sans panne.

b) Déterminer t pour que la probabilité qu'une machine prélevée au hasard dans le parc fonctionne plus de t jours, soit égale à 0,8. Arrondir à l'entier par défaut.

4°)a) $P(T > 200) = e^{-0,005 \times 200} = e^{-1} = \dfrac{1}{e} \cong 0{,}368$

b) $P(T > t) = 0{,}8 \Leftrightarrow e^{-0,005t} = 0{,}8$

$\Leftrightarrow -0{,}005t = \ln(0{,}8)$

$\Leftrightarrow t = \dfrac{\ln(0{,}8)}{-0{,}005}$

Donc $t \cong 44{,}63$, donc à l'entier par défaut : t = 44 jours.

EXERCICE 2 :

PARTIE A :

1°) $(E_0) : y' + y = 0$

La solution générale de (E_0) est $y_0(x) = Ce^{-G(x)}$ où G est une primitive de $x \mapsto 1$, à savoir $G(x) = x$.

Donc $y_0(x) = Ce^{-x}$ où $C \in \mathbb{R}$.

2°) $h(x) = 2xe^{-x}$

$h'(x) = e^{-x}(2 - 2x)$

$h'(x) + h(x) = (2 - 2x)e^{-x} + 2xe^{-x} = 2^{e-x}$

Donc h est bien une solution particulière de €.

3°) La solution générale de [E] est :

$y(x) = y_0(x) + h(x) = Ce^{-x} + 2xe^{-x} = e^{-x}(C + 2x)$

4°) f solution de (E) donc $f(x) = e^{-x}(C + 2x)$

C_f passe par le point (0 ;3) $\Leftrightarrow f(0) = 3$

$\left.\begin{matrix} f(0) = C \\ f(0) = 3 \end{matrix}\right\} C = 3$

donc $f(x) = (3 + 2x)e^{-x}$

PARTIE B :

1°)a) $A(0,3) \in C_f$ donc $f(0) = 3$

b) On peut répondre à cette question de 2 façons différentes, et il suffit d'en donner une seule pour répondre correctement. Je vais néanmoins donner les deux méthodes.

<u>GRAPHIQUEMENT</u> : En utilisant le quadrillage, on se rend compte que le coef directeur de la tangente Δ en A est : - 1, donc f'(0) = -1.

<u>PAR LE CALCUL</u> : Le coef directeur de la droite (AB) = Δ est :

$m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{0-3}{3-0} = -1$ docn f'(0) = - 1.

c) $\left.\begin{matrix} f(0) = b \\ f(0) = 3 \end{matrix}\right\} b = 3$

$f(x) = (ax + b)e^{-x}$ donc $f'(x) = e^{-x}(-ax - b + a)$

$$\left.\begin{array}{l} f'(0) = a - b = a - 3 \\ f'(0) = -1 \end{array}\right\} a - 3 = -1 \Leftrightarrow a = 2$$

Donc $f(x) = (2x + 3)e^{-x}$

d) $f(x) = (2x + 3)e^{-x}$ donc $f'(x) = e^{-x}(-2x - 3 + 2) = e^{-x}(-2x - 1)$

e) $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow (-2x - 1)e^{-x} \geq 0$

$\Leftrightarrow -2x - 1 \geq 0$ car $e^{-x} > 0$

$\Leftrightarrow x \leq -\dfrac{1}{2}$

f)

x	$-\infty$		$-\dfrac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	
f		$\nearrow$	$2\sqrt{e}$	$\searrow$	

$f\left(-\dfrac{1}{2}\right) = \left(2x - \dfrac{1}{2} + 3\right)e^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{e}$

2°)a) $\lim\limits_{x \to 0} -x = 0$ donc on peut utiliser le dl de e^t pour déterminer celui de e^{-x}.

$e^t = 1 + t + \dfrac{t^2}{2} + t^2\varepsilon_1(t)$ avec $\lim\limits_{t \to 0} \varepsilon_1(t) = 0$

$e^{-x} = 1 - x + \dfrac{x^2}{2} + x^2\varepsilon_2(x)$ avec $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon_2(x) = 0$

b) $(2x + 3)\left(1 - x + \dfrac{x^2}{2}\right) = 2x - 2x^2 + 3 - 3x + \dfrac{3}{2}x^2 + x^2\varepsilon_3(x)$

$= 3 - x - \dfrac{x^2}{2} + x^2\varepsilon_3(x)$

Donc $f(x) = 3 - x - \dfrac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$

PARTIE C :

1°) f solution de (E) $\Leftrightarrow f'(x) + f(x) = 2e^{-x} \Leftrightarrow f(x) = -f'(x) + 2e^{-x}$

Donc $F(x) = -f(x) - 2e^{-x}$ est une primitive de f.

2°)a) $I = \int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx = \left[F(x)\right]_0^{\frac{1}{2}} = F\left(\dfrac{1}{2}\right) - F(0)$

$= -f\left(\dfrac{1}{2}\right) - 2e^{-\frac{1}{2}} + f(0) + 2$

$= -\left(2x\dfrac{1}{2} + 3\right)e^{-\frac{1}{2}} + 3 + 2$

$= -6e^{-\frac{1}{2}} + 5$

b) $I \cong 1,361$

3°)a) $J = \int_0^{\frac{1}{2}}\left(3 - x - \dfrac{1}{2}x^2\right)dx = \left[3x - \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{1}{6}x^3\right]_0^{\frac{1}{2}} = \dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{8} - \dfrac{1}{48} = \dfrac{65}{48}$

b) $J \cong 1,354$

c) $I - J \cong 1,361 - 1,354 = 0,007$

On a bien $|I - J| < 10^{-2}$