

GROUPEMENT B 2001

EXERCICE 1

PARTIE A :

1°) Epreuve de Bernoulli : succès : la pièce est conforme : $p = 0,9$; échec : la pièce n'est pas conforme.

On réalise $n = 10$ fois cette épreuve de manière indépendante (stock assez important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise).

X compte le nombre de succès au cours des 10 réalisations, donc X suit

$\mathcal{B}(10; 0,9)$.

$$\begin{aligned} 2^\circ) P(X \geq 8) &= P(X = 8) + P(X = 9) + P(X = 10) \\ &= C_{10}^8 0,9^8 0,1^2 + C_{10}^9 0,9^9 0,1 + C_{10}^{10} 0,9^{10} \\ &\cong 0,930 \end{aligned}$$

La probabilité que 8 pièces au moins soient conformes dans un lot de 10 est de 0,930.

PARTIE B :

1°) M suit $\mathcal{N}(250; 1,94)$ donc $\bar{M} = \frac{M-250}{1,94}$ suit $\mathcal{N}(0; 1)$.

$$\begin{aligned} P(246 \leq M \leq 254) &= P\left(\frac{246-250}{1,94} \leq \bar{M} \leq \frac{254-250}{1,94}\right) \\ &\cong P(-2,06 \leq \bar{M} \leq 2,06) \\ &= P(\bar{M} \leq 2,06) - P(\bar{M} \leq -2,06) \\ &= \pi(2,06) - \pi(-2,06) \\ &= \pi(2,06) - (1 - \pi(2,06)) \\ &= 2\pi(2,06) - 1 \\ &\cong 2 \times 0,9803 - 1 \\ &= 0,9606 \\ &\cong 0,961 \end{aligned}$$

La probabilité que la longueur de la pièce prélevée au hasard soit comprise entre 246 et 254 mm est de 0,961.

2°) N suit $\mathcal{N}(150; 1,52)$ donc $\bar{N} = \frac{N-150}{1,52}$ suit $\mathcal{N}(0; 1)$.

$$\begin{aligned} P(147 \leq N \leq 153) &= P\left(\frac{147-150}{1,52} \leq \bar{N} \leq \frac{153-150}{1,52}\right) \\ &\cong P(-1,97 \leq \bar{N} \leq 1,97) \\ &= P(\bar{N} \leq 1,97) - P(\bar{N} \leq -1,97) \\ &= \pi(1,97) - \pi(-1,97) \\ &= \pi(1,97) - (1 - \pi(1,97)) \\ &= 2\pi(1,97) - 1 \\ &\cong 2 \times 0,9756 - 1 \\ &= 0,9512 \\ &\cong 0,951 \end{aligned}$$

La probabilité que la largeur de la pièce prélevée au hasard soit comprise entre 147 et 153 mm est de 0,951.

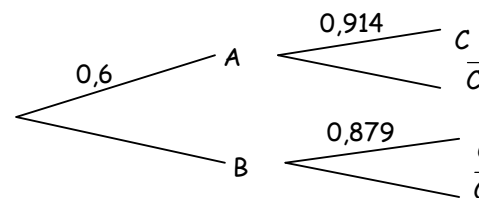
3°) $P((246 \leq M \leq 254) \cap (147 \leq N \leq 153))$

$$\begin{aligned} &= P(246 \leq M \leq 254) \times P(147 \leq N \leq 153) \text{ car } M \text{ et } N \text{ sont indépendantes.} \\ &= 0,9606 \times 0,9512 \\ &\cong 0,914 \end{aligned}$$

La probabilité qu'une pièce soit conforme est bien de 0,914.

PARTIE C :

1°)



$$\begin{aligned} P(A) &= 0,6 \\ P(B) &= 1 - P(A) = 0,4 \\ P(C/A) &= 0,914 \\ P(C/B) &= 0,879 \end{aligned}$$

2°) $P(C \cap A) = P(A) \times P(C/A) = 0,6 \times 0,914 \cong 0,548$

$$P(C \cap B) = P(B) \times P(C/B) = 0,4 \times 0,879 \cong 0,352$$

3°) $P(C) = P(C \cap A) + P(C \cap B) = 0,548 + 0,352 = 0,9$.

EXERCICE 2 :**PARTIE A :**

1°) $y' - 2y = 0$ (E_0)

$a(x) = 1$ et $b(x) = -2$

G est une primitive de $x \mapsto \frac{b(x)}{a(x)} = -2$ donc $G(x) = -2x$

La solution générale de (E_0) est $y_0(x) = ke^{-G(x)} = ke^{2x}$, $k \in \mathbb{R}$.

2°) $h(x) = xe^{2x}$

$h'(x) = e^{2x}(2x + 1)$

$h'(x) - 2h(x) = e^{2x}(2x + 1) - 2xe^{2x} = e^{2x}$

Donc h est une solution de (E_0).

3°) La solution générale de (E) est : $y(x) = y_0(x) + h(x) = ke^{2x} + xe^{2x} = e^{2x}(k + x)$

4°) f solution de (E) donc $f(x) = e^{2x}(k + x)$

$$\left. \begin{array}{l} f(0) = k \\ f(0) = -1 \end{array} \right\} k = -1 \text{ donc } f(x) = e^{2x}(x - 1)$$

PARTIE B :

$$1^\circ) a) \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 1) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \end{array} \right\} \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x} = +\infty \left. \right\} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

b) $f(x) = xe^{2x} - e^{2x}$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^{2x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \end{array} \right\} \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x} = 0 \left. \right\} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

c) $y = 0$ est asymptote horizontale à $\mathcal{C}_f$ en $-\infty$.

2°) a) $f(x) = (x - 1)e^{2x}$

$f'(x) = e^{2x}(2x - 2 + 1) = e^{2x}(2x - 1)$

b) $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow e^{2x}(2x - 1) \geq 0 \Leftrightarrow 2x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2}$

c)

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
f	0	$-\frac{1}{2}e$	$+\infty$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2} - 1\right)e = -\frac{1}{2}e$$

3°) a) On sait que $e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + t^3 \varepsilon_1(t)$ avec $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_1(x) = 0$

$\lim_{x \rightarrow 0} 2x = 0$ donc on peut utiliser le dl de $t \mapsto e^t$ pour déterminer celui de $x \mapsto e^{2x}$

$$e^{2x} = 1 + 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + x^3 \varepsilon_2(x) \text{ avec } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_2(x) = 0$$

b) $(x - 1)(1 + 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3) = x + 2x^2 + 2x^3 - 1 - 2x - 2x^2 - \frac{4}{3}x^3 + x^3 \varepsilon_2(x)$

$$= -1 - x + \frac{2}{3}x^3 + x^3 \varepsilon_3(x) \text{ avec } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_3(x) = 0$$

$$f(x) = -1 - x + \frac{2}{3}x^3 + x^3 \varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$$

c) L'équation de la tangente T à $\mathcal{C}_f$ est donnée par la partie régulière de degrés 1 du dl $_3^0$ de f : $T : y = -1 - x$.

Position de T par rapport à $\mathcal{C}_f$ pour x proche de 0 :

$$f(x) + 1 + x = \frac{2}{3}x^3 + x^3 \varepsilon(x)$$

Pour x proche de 0 :

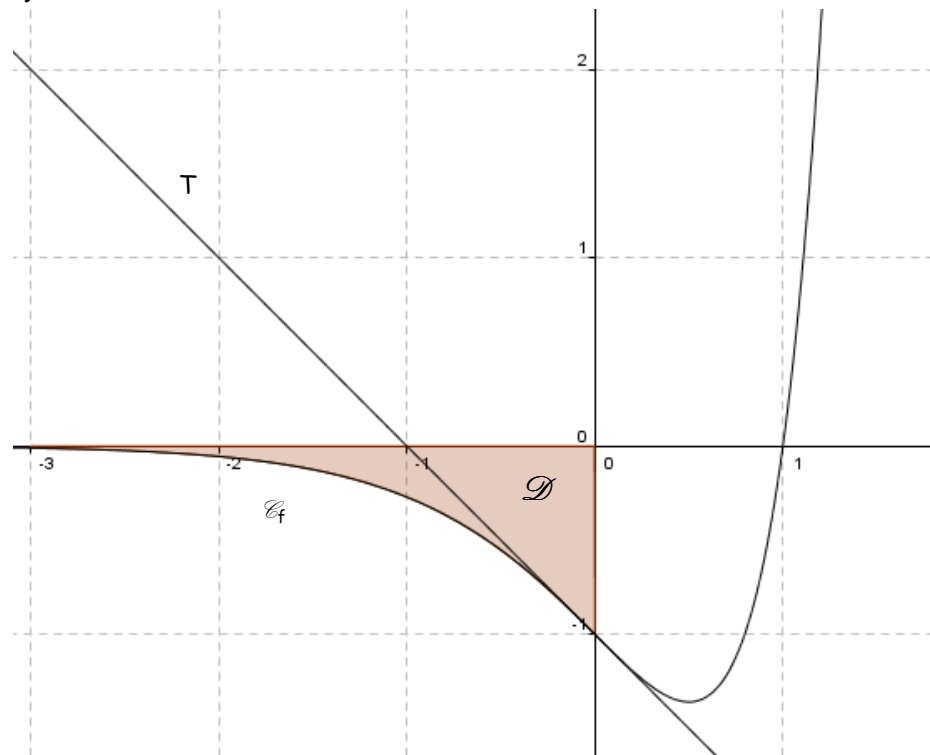
- $x \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2}{3}x^3 \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \geq -1 - x$

$\mathcal{C}_f$ est au dessus de T .

- $x \leq 0 \Leftrightarrow \frac{2}{3}x^3 \leq 0 \Leftrightarrow f(x) \leq -1 - x$

$\mathcal{C}_f$ est au dessous de T .

d)



PARTIE C :

$$1^{\circ}) I(\alpha) = \int_{\alpha}^0 f(x) dx = \int_{\alpha}^0 (x-1)e^{2x} dx$$

$$u(x) = x - 1$$

$$u'(x) = 1$$

$$v'(x) = e^{2x}$$

$$v(x) = \frac{1}{2} e^{2x}$$

$$\begin{aligned} I(\alpha) &= \left[\frac{1}{2} e^{2x} (x-1) \right]_{\alpha}^0 - \int_{\alpha}^0 \frac{1}{2} e^{2x} dx \\ &= -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} (\alpha-1) e^{2\alpha} - \left[\frac{1}{4} e^{2x} \right]_{\alpha}^0 \\ &= -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} (\alpha-1) e^{2\alpha} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} e^{2\alpha} \\ &= -\frac{3}{4} - \frac{\alpha}{2} e^{2\alpha} + \frac{3}{4} e^{2\alpha} \end{aligned}$$

$$2^{\circ}) a) \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} \alpha e^{2\alpha} = 0 \text{ et } \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} e^{2\alpha} = 0 \text{ donc } \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} I(\alpha) = -\frac{1}{4}.$$

$$b) I(\alpha) \text{ représente l'opposé de l'aire du domaine } D := \left\{ M(x,y) / \begin{cases} x \geq 0 \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases} \right\}$$