

Brevet de technicien supérieur novembre 2008 - groupement B Nouvelle-Calédonie

Exercice 1

10 points

Les parties A, B et C sont indépendantes.

Une entreprise produit en grande série des véhicules électriques équipés de batteries au nickel-cadmium. On se propose d'étudier l'autonomie en kilomètres de ces véhicules.

A - Soit X la variable aléatoire qui, à chaque véhicule pris au hasard dans la production, associe son autonomie.

On admet que X suit la loi normale de moyenne $\mu = 104$ et d'écart type $\sigma = 6$.

1. Déterminer, à 10^{-2} près, la probabilité p_1 que l'autonomie d'un véhicule pris au hasard dans la production soit comprise entre 98 et 122.
2. La probabilité qu'un véhicule ait une autonomie insuffisante et soit donc déclaré non conforme au cahier des charges est $p_2 = 0,04$. Calculer l'autonomie correspondante, c'est-à-dire le nombre réel d tel que $P(X \leq d) = 0,04$.

B - Les véhicules sont parqués par lots de 75 avant de recevoir le certificat de conformité.

On note Y la variable aléatoire qui, à tout échantillon de 75 véhicules pris au hasard dans la production, associe le nombre de véhicules non conformes.

La production est assez importante pour qu'on puisse assimiler tout échantillon de 75 véhicules à un échantillon aléatoire prélevé avec remise.

On suppose que la probabilité qu'un véhicule soit non conforme est 0,04.

1. Expliquer pourquoi Y suit une loi binomiale et donner les paramètres de cette loi.

Calculer à 10^{-3} près, la probabilité $p_3 = P(Y = 0)$ de l'évènement « dans l'échantillon prélevé au hasard tous les véhicules sont conformes ».

2. On admet que la loi précédente peut être approchée par une loi de Poisson de même espérance mathématique. Donner son paramètre. Calculer à 10^{-3} près, la probabilité p_4 de l'évènement « dans l'échantillon prélevé au hasard il y a au plus deux véhicules non conformes ».

C - À la suite d'une modification des batteries, on redoute que l'autonomie moyenne des véhicules soit modifiée. Afin de contrôler que la moyenne des autonomies de l'ensemble des véhicules mis sur le marché après modification des batteries est 104, on se propose de construire un test d'hypothèse (test bilatéral, bien que, pour cette situation, un test unilatéral soit plus adapté).

On désigne par \bar{X} la variable aléatoire qui à chaque échantillon aléatoire de 36 véhicules, associe la moyenne des autonomies des 36 véhicules (la production est assez importante pour qu'on puisse assimiler ces prélèvements à des tirages de 36 véhicules avec remise).

L'hypothèse nulle est $H_0 : \mu = 104$.

L'hypothèse alternative est $H_1 : \mu \neq 104$.

Le seuil de signification du test est fixé à 0,05.

On suppose que, sous l'hypothèse nulle H_0 la variable aléatoire X suit la loi normale de moyenne 104 et d'écart type 1.

1. Déterminer à 10^{-2} près le nombre réel positif h tel que $P(104 - h \leq X \leq 104 + h) = 0,95$.
2. Énoncer la règle de décision permettant d'utiliser ce test

3. Une étude statistique sur un échantillon de 36 véhicules donne 102,9 comme moyenne des autonomies des véhicules de cet échantillon.
Utiliser le test avec cet échantillon et conclure.

Exercice 2**10 points****Les deux parties A et B peuvent être traitées de façon indépendante****A - Résolution d'une équation différentielle**

On considère l'équation différentielle (E) :

$$y'' - 3y' + 2y = -1 - 2x$$

où y désigne une fonction de la variable réelle x , définie et deux fois dérivable sur \mathbb{R} .
 y' la fonction dérivée de y et y'' sa fonction dérivée seconde.

1. Déterminer les solutions de l'équation différentielle (E_1) : $y'' - 3y' + 2y = 0$.
2. Déterminer les constantes réelles a et b pour que la fonction g définie sur \mathbb{R} par : $g(x) = ax + b$ soit une solution particulière de l'équation (E).
3. Dédire du 1. et du 2. l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).
4. Déterminer la solution f de l'équation (E) qui vérifie les conditions initiales $f(0) = 0$ et $f'(0) = 2$.

B - Étude d'une fonctionOn considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = e^{2x} + e^x - x - 2.$$

On note \mathcal{C} sa courbe représentative dans un repère orthonormal d'unité 2cm .

1.
 - a. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. On pourra mettre e^x en facteur dans $f(x)$.
 - b. Déterminer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
 - c. Démontrer que la droite D d'équation $y = -x - 2$ est une asymptote de la courbe \mathcal{C} .
 - d. Étudier la position relative de \mathcal{C} et D .
2.
 - a. Calculer $f'(x)$ pour tout x de \mathbb{R} .
 - b. Vérifier que pour tout x de \mathbb{R} , $f'(x) = 2(e^x + 1) \left(e^x - \frac{1}{2} \right)$.
 - c. Dédire du b. le signe de $f'(x)$ lorsque x varie dans \mathbb{R} .
 - d. Établir le tableau variation de la fonction f .
3. Construire D et \mathcal{C} .
4. Calculer la valeur exacte en cm^2 , de l'aire de la partie du plan limitée par la courbe \mathcal{C} , son asymptote D et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 0$.