Brevet de technicien supérieur octobre 2006 - groupement B Nouvelle–Calédonie

Exercice 1 **11 points**

Dans cet exercice on étudie une fonction intervenant dans la modélisation d'un risque de catastrophe naturelle.

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

A. Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle (E) :

$$10^4 y' + 2ty = 0,$$

où y est une fonction de la variable réelle définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et y' sa fonction dérivée.

1. Déterminer les solutions de l'équation différentielle (E).
2. Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) qui vérifie la condition initiale $f(0) = 1$.

B. Étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{10^4}}$.

On désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère onhogonal.

1. **a.** Déterminer $\lim\limits_{t \to -\infty} f(t)$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t)$.

   b. Interpréter graphiquement les résultats obtenus au a.
2. On désigne par f' la fonction dérivée de f.

   Un logiciel de calcul formel donne l'expression de $f'(t)$:

   pour tout t de $\mathbb{R}$, $f'(t) = -\frac{2t}{10^4}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{10^4}}$.

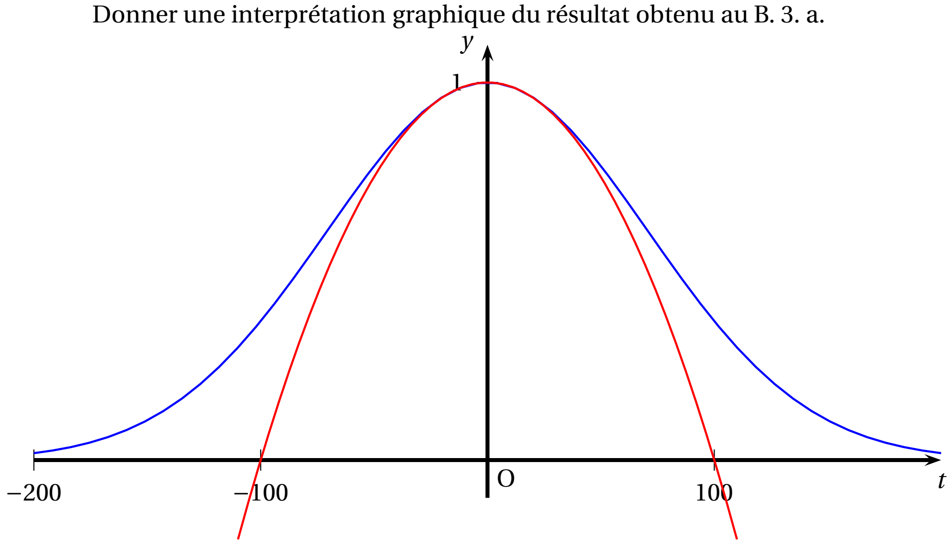
   Ce résultat, admis, n'a pas à être démontré.

   a. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $f'(t) \geqslant 0$.

   b. En déduire le sens de variations de f sur $\mathbb{R}$.
3. **a.** À l'aide du développement limité, à l'ordre 1, au voisinage de 0, de la fonction $u \longmapsto \mathrm{e}^u$, calculer le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction f.

   b. Sur la figure ci-après sont tracées la courbe $\mathscr{C}$ et la courbe représentative Γ de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(t) = 1 - \frac{t^2}{10^4}$.

   Donner une interprétation graphique du résultat obtenu au B. 3. a.



4. Démontrer que $\displaystyle\int_0^{30}\left(1-\frac{t^2}{10^4}\right)\mathrm{d}t = 29,1$.

C. Application à la gestion d'un risque

On admet que la probabilité qu'un certain type de « catastrophe naturelle » ne se produise pas pendant les t années à venir est donnée par $f(t) = \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{10^4}}$.

1. Calculer la probabilité que cette catastrophe naturelle ne se produise pas pendant les 50 ans à venir. Arrondir à 10^{-1}.

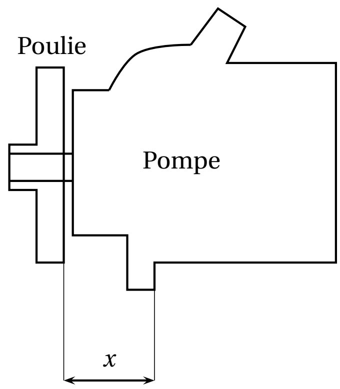
2. **a.** Déterminer un nombre réel positif t tel que $\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{10^4}} = 0,5$; donner la valeur exacte, puis arrondir à 10^{-1}.

b. Traduire le résultat du C. 2. a. à l'aide d'une phrase.

Exercice 2 **9 points**

Les quatre parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante

Un atelier d'une usine d'automobiles est chargé de l'assemblage d'un moteur. Dans cet exercice on s'intéresse au contrôle de qualité de l'emmanchement d'une poulie sur une pompe de direction assistée. Cet emmanchement est contrôlé par la mesure, en millimètres, de la cote x apparaissant sur la figure ci-contre



Dans cet exercice, sauf mention contraire, les résultats approchés sont à arrondir à 10^{-3}

A. Probabilités conditionnelles

Dans cette partie, on s'intéresse, un jour donné, à une machine assurant l'installation de la poulie. Cette machine peut connaître une défaillancc susceptible d'être détectée par un système d'alerte.

Le système d'alerte peut aussi se déclencher sans raison.

On note D l'évènement : « la machine est défaillante » et on note A l'évènement : « l'alerte est donnée ».

On admet que : $P(D) = 0,001$; $P(A/D) = 0,99$ et $P(A/\overline{D}) = 0,005$.

(On rappelle que $P(A/D) = P_D(A)$ est la probabilité de l'évènement A sachant que l'évènement D est réalisé).

1. En remarquant que $A = (A\cap D)\cup\left(A\cap\overline{D}\right)$ et que $A\cap D$ et $A\cap\overline{D}$ sont incompatibles, calculer $P(A)$.

2. L'alerte est donnée. Calculer la probabilité qu'il s'agisse d'une « fausse alerte », c'est à dire $P\left(\overline{D}A/A\right)$. Arrondir à 10^{-2}.

B. Loi normale

L'installation de la poulie est considérée comme conforme lorsque la cote x appartient à l'intervalle [39,85 ; 40,15].

On note X la variable aléatoire qui à chaque ensemble pompe-poulie prélevé au hasard dans la production, associe sa cote x. On suppose que X suit la loi normale de moyenne 40 et d'écart type 0,06.

Calculer la probabilité que la cote x d'un ensemble pompe-poulie prélevé au hasard dans la production soit confonne.

C. Loi binomiale

On suppose que dans la production du jour, 50 % des ensembles pompe-poulie ont des cotes x supérieures ou égales à 40 millimètres. On prélève au hasard 7 ensembles pompe-poulie dans cette production. La production est suffisamment importante pour qu'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise.

On considère la variable aléatoire Y qui, à tout prélèvement de 7 ensembles pompe-poulie, associe le nombre de ceux dont la cote x est supérieure ou égale à 40.

1. Justifier que la variable aléatoire Y suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.

2. Calculer $P(Y = 7)$.

D. Test d'hypothèse

On se propose de construire un test d 'hypothèse pour contrôler la moyenne μ des ensembles pompe-poulie d'n lot important venant d'être réalisé.

On note Z la variable aléatoire qui, à chaque ensemble pompe-poulie prélevé au hasard dans ce lot, associe sa cote x. La variable aléatoire Z suit la loi normale de moyenne inconnue μ et d'écart type $\sigma = 0,06$.

On désigne par $\overline{Z}$ la variable aléatoire qui, à chaque échantillon aléatoire de 30 ensembles pompe-poulie prélevé dans le lot, associe la moyenne des cotes X de cet échantillon (le lot est assez important pour que l'on puisse assimiler ces prélèvements à des tirages avec remise).

L'hypothèse nulle est $H_0\ :\ \mu = 40$. Dans ce cas le lot est dit conforme.

L'hypothèse alternative est $H_1\ : \mu \neq 40$.

Le seuil de signification du test est fixé à 0,05.

1. Justifier le fait que, sous l'hypothèse nulle H_0, Z suit la loi normale de moyenne 40 et d'écart type 0,011.

2. Sous l'hypothèse nulle H_0, déterminer le nombre réel h positif tel que :

$$P(40 - h \leqslant Z \leqslant 40 + h) = 0,95.$$

3. Énoncer la régie de décision permettant d'utiliser ce test.

4. On prélève un échantillon de 30 ensembles pompe–poulie dans le lot et on observe que, pour cet échantillon, la moyenne des cotes x est $\overline{x} = 39,98$.

Peut-on, au seuil de risque de 5 %, conclure que le lot est conforme ?